Uber Verallgemeinerungen des Dirichletschen und des Fourierschen Integrals.

Auszug aus einer Schrift
zur
Erlangung der philosophischen Doktorwürde
bei der
Hohen Philosophischen Fakultät der
Schles. Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Breslau

vorgelegt von

Friedrich Zickermann
aus Breslau.

Promotion: 20. Februar 1924.

HOCHSCHULVERLAG BRESLAU
Schles. Buchdruckerei u. Verlag Karl Vater, Breslau 10, Matthiasstr. 12.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Berichterstatter: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Kneser.

Mündliche Prüfung: 28. November 1923.

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage behandelt: Gibt es ähnliche Darstellungen einer willkürlichen Funktion wie das Dirichletsche Integral und das Fouriersche Doppelintegral auch durch andere Funktionen als sin und cos? Das Verfahren ist einer von A. Pringsheim (Math. Ann. 68) angewandten Methode nachgebildet.

1. Die Resultate sind zunächst folgende Sätze.

$\varphi(\alpha)$ sei in jedem endlichen Intervall integrabel, außerdem in der Umgebung jeder Unendlichkeitsstelle absolut integrabel. $y(\alpha)$ genüge folgenden Bedingungen:

1.) $y(\alpha)$ ist für jedes noch so große $\alpha \geq 0$ beschränkt,

2.) Das Integral $\int_\alpha^\beta y(x)\,dx$ zwischen beliebigen Grenzen $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ ist beschränkt.

3.) Für jedes endliche $\alpha > 0$ existiert das Integral $\int_0^\alpha \frac{y(x)}{x}\,dx$. Unter diesen Voraussetzungen besteht für beliebiges endliches $a > 0$ die Gleichung

$$\lim_{p=\infty} \int_0^a \varphi(\alpha) \frac{y(p\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = \varphi(+0) \int_0^\infty \frac{y(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \qquad (A)$$

wenn $\varphi(\alpha)$ am Nullpunkt einer einzelnen der folgenden drei Bedingungen genügt:

$\mathfrak{B}_1$. $\frac{\varphi(\alpha) - \varphi(+0)}{\alpha}$ ist für ein beliebig kleines Intervall $0 \leq \alpha \leq a_0$ absolut integrabel.

$\mathfrak{B}_2$. $\varphi(\alpha)$ ist für $0 \leq \alpha < a_0$ monoton.

$\mathfrak{B}_3$. $\varphi(\alpha)$ besitzt für $0 < \alpha < a_0$ eine absolut integrable Ableitung $\varphi'(\alpha)$.

Über eine Funktion $z(\alpha)$ werde vorausgesetzt:

$z(\alpha)$ ist beschränkt, auch wenn $\alpha \geq 0$ über alle Grenzen wächst.

Das Integral $\int\limits_0^\alpha z(x)\,dx = y(\alpha)$ existiert für alle $\alpha \geq 0$ und erfüllt die Bedingungen 1.), 2.), 3.).

Dann ist für jedes endliche $a > 0$

$$\int\limits_0^\infty d\beta \int\limits_0^a \varphi(\alpha)\, z(\beta\alpha)\, d\alpha = \varphi(+0) \int\limits_0^\infty \frac{y(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha. \qquad \text{(B)}$$

wenn $\varphi(\alpha)$ dieselben Voraussetzungen wie in Formel (A) erfüllt.

2. Nach Aufstellung der Formeln (A) und (B) wird der Grenzübergang $a \to \infty$ untersucht; es ergeben sich die folgenden weiteren Sätze.

Unter den Voraussetzungen der Formel (A) ist auch

$$\lim_{p=\infty} \lim_{a=\infty} \int\limits_0^a \varphi(\alpha) \frac{y(p\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \varphi(+0) \int\limits_0^\infty \frac{y(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \qquad \text{(A')}$$

wenn $\varphi(\alpha)$ im Unendlichen eine einzelne der folgenden Bedingungen erfüllt:

B_1. $\dfrac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ ist im Unendlichen absolut integrabel.

B_2. $\dfrac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$ ist von einer gewissen Stelle $\alpha \geq A$ ab monoton und beschränkt.

B_3. $\dfrac{\varphi'(\alpha)}{\alpha}$ ist im positiv Unendlichen absolut integrabel.

Ebenso ist unter den Voraussetzungen der Formel (B)

$$\lim_{p=\infty} \lim_{a=\infty} \int\limits_0^p d\beta \int\limits_0^a \varphi(\alpha)\, z(\beta\alpha)\, d\alpha = \varphi(+0) \int\limits_0^\infty \frac{y(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \qquad \text{(B')}$$

wenn $\varphi(\alpha)$ im Unendlichen einer einzelnen der folgenden drei Bedingungen genügt:

$\mathfrak{B}(^1)$. $\varphi(\alpha)$ ist im Unendlichen absolut integrabel.

$\mathfrak{B}(^2)$. $\varphi(\alpha)$ konvergiert mit unbegrenzt wachsendem α monoton gegen Null.

$\mathfrak{B}(^3)$. $\lim\limits_{\alpha=\infty} \varphi(\alpha) = 0$, und $\varphi(\alpha)$ besitzt zum mindesten für hinlänglich große α eine im Unendlichen absolut integrable Ableitung $\varphi'(\alpha)$.

3. Wenn man den Kreis der Funktionen $\varphi(\alpha)$ etwas enger zieht, so bestehen die Formeln (A) und (B) bereits unter erheblich geringeren Voraussetzungen über $y(\alpha)$ bezw. $z(\alpha)$. Zum Beweise von (A) genügt die Annahme, daß das Integral $\int_0^\infty \frac{y(\alpha)}{\alpha} d\alpha$ existiert; für (B) ist vorauszusetzen:

$$\int_0^\alpha z(x)\,dx = y(\alpha) \text{ existiert für jedes endliche } \alpha > 0;$$

$$\int_0^\infty \frac{y(\alpha)}{\alpha} d\alpha \text{ existiert.}$$

Über $\varphi(\alpha)$ ist dann eine der folgenden beiden Voraussetzungen zu machen:

a) In jedem endlichen Intervall ist $\varphi(\alpha)$ beschränkt und abteilungsweise monoton.

b) $\varphi(\alpha)$ besitzt eine in jedem endlichen Intervall absolut integrable Ableitung $\varphi'(\alpha)$.

Der Fall a) ist von P. du Bois-Reymond in mehreren Abhandlungen (Crelles Journ. 69; 79; Math. Ann. 4) ausführlich behandelt worden.

Die Formeln (A') und (B'), die übrigens von du Bois-Reymond nicht bewiesen werden, bestehen ebenfalls unter den Bedingungen a) oder b), wenn noch der Funktion $\varphi(\alpha)$ gewisse Beschränkungen im Unendlichen auferlegt werden. Es sind dies Erweiterungen der Bedingungen B_2 oder B_3 bezw. $B^{(2)}$ oder $B^{(3)}$; man hat hierin nur $\alpha\,\varphi(\alpha)$ statt $\varphi(\alpha)$ und $\alpha\,\varphi'(\alpha)$ statt $\varphi'(\alpha)$ zu schreiben.

4. Schließlich erfolgt als Ziel der Untersuchungen der Nachweis, daß die Funktion y durch gewisse Integrale der Differentialgleichung (s. A. Kneser, Crelles Journ. 117)

$$y'' + y\,f(x) = 0$$

ersetzt werden kann, unter folgenden Annahmen über $f(x)$:

$f(x)$ und $f'(x)$ sind endlich und stetig, sobald $x > g$.

Der Grenzwert $\lim_{x=\infty} f(x)$ existiert und ist positiv.

Es gibt eine positive Konstante γ von der Beschaffenheit, daß $x^{1+\gamma} f'(x)$ beschränkt ist, sobald $x > g$.

Bedeutet nun x_0 die kleinste Nullstelle von $y(x)$ oberhalb g, so erfüllt $y(x_0 + \alpha)$ als Funktion von α stets die Bedingungen 1.), 2.), 3.), womit alles bewiesen ist.

Gedruckt mit Genehmigung der Hohen Philosophischen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität.